PROBLEME : On donne un réel $k \geqslant -1$ et on considère l'équation différentielle

$$E_k \qquad y'' = y^k.$$

On se propose d'étudier dans le demi-plan ouvert P caractérisé par $y > 0$ l'ensemble S_k des solutions maximales f de E_k qui vérifient la condition supplémentaire $f'(0) = 0$. On pose $f(0) = m > 0$; on note γ le graphe de f et Γ_k l'ensemble des courbes intégrales γ de E_k lorsque f décrit S_k.

I

Cette partie est consacrée à l'étude de trois cas particuliers.

1° On suppose d'abord k nul.

a) Trouver les solutions $f \in S_0$. Quel est leur intervalle I de définition ? Que sont les courbes intégrales $\gamma \in \Gamma_0$?

b) Discuter, suivant la position du point (x_1, y_1) dans P, le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_0$ passant par (x_1, y_1).

2° Résoudre les mêmes questions lorsque $k = 1$.

3° *Dans toute la suite de la partie* I, on suppose $k = -1$.

a) Montrer sans calculs qu'il existe une et une seule solution $f_0 \in S_{-1}$ pour laquelle $f_0(0) = 1$. Vérifier que toutes les autres solutions $f \in S_{-1}$ sont données par $f(x) = m f_0\left(\dfrac{x}{m}\right)$. Comment déduit-on le graphe de f de celui de f_0 ?

b) Quel est le sens de la concavité et quels sont les sens de variation de $f \in S_{-1}$?

4° *a*) Pour $f \in S_{-1}$, $x \geqslant 0$ et $y = f(x)$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $Y = \dfrac{y}{m}$ et en déduire l'ensemble des valeurs et l'intervalle de définition de f.

b) Dans les mêmes conditions, montrer que $\dfrac{x}{y} = F(Y)$ où F est la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$F(Y) = \frac{1}{Y}\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}}.$$

c) Montrer que, lorsque Y tend vers $+\infty$, F(Y) tend vers 0 (on pourra diviser l'intervalle d'intégration $[1, Y]$ en deux intervalles $[1, A]$ et $[A, Y]$ avec un choix convenable du réel A). En déduire la nature des branches infinies de γ.

d) Montrer que, sur $]1, +\infty[$, la dérivée F' de F s'annule pour une et une seule valeur Y_0 de Y, et que $y' = f'(x) = \dfrac{y}{x}$ lorsque $Y = Y_0$.

e) Discuter, suivant la position du point (x_1, y_1) dans le quart de plan Q caractérisé par $x_1 \geqslant 0$, $y_1 > 0$, le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_{-1}$ passant par (x_1, y_1) et exprimer en fonction de Y_0 la pente de la demi-droite D située dans Q à laquelle les courbes γ sont toutes tangentes.

5° Soit φ la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $\varphi(Y) = \dfrac{Y}{\sqrt{2 \ln Y}}$.

a) Pour quelle valeur Y_1 de Y la fonction φ atteint-elle son minimum et quelle est la valeur de ce minimum ?

b) A l'aide du changement de variable $t = e^{\frac{u^2}{2}}$, comparer $\displaystyle\int_1^{Y_1} \frac{dt}{\sqrt{2 \ln t}}$ à la valeur minimale de φ, puis comparer Y_0 à Y_1 et en déduire que la pente de D est strictement supérieure à 1.

II

Dans toute la suite du problème, on suppose $k > -1$. *Lorsque cela simplifiera les notations, on utilisera le paramètre* $\alpha = \dfrac{k+1}{2} > 0$.

6° *a*) Pour $m > 0$ donné, combien y a-t-il de solutions $f \in S_k$ telles que $f(0) = m$?

b) Si f est une telle solution, définie sur un intervalle I, comparer à f la fonction g définie sur l'intervalle J symétrique de I par rapport à 0 par $g(x) = f(-x)$. L'intervalle I est-il symétrique par rapport à 0 ?

c) Quel est le sens de la concavité et quels sont les sens de variation de f ?

7° *a*) Pour $f \in S_k$, $x \geqslant 0$ et $y = f(x)$, exprimer $y' = f'(x)$ en fonction de y, m et α, puis x en fonction de ces mêmes trois nombres réels, sous forme d'une intégrale. Pour quelles valeurs de α l'intervalle I de définition de f est-il borné ? Exprimer dans ce cas les bornes de I en fonction de m, de α, et d'une intégrale ne dépendant que de α, et indiquer le comportement de γ aux extrémités de I.

b) Dans le cas où I est non borné, montrer que, lorsque x tend vers ∞, $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ ont la même limite. Quelle est la nature des branches infinies de γ ?

III

L'objet de cette partie est l'étude de la distribution dans le quart de plan Q caractérisé par $x \geqslant 0$ et $y > 0$ de la partie des courbes $\gamma \in S_k$ correspondant à $x \geqslant 0$. On utilisera dans ce but la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par

$$F(Y) = \sqrt{\alpha}\, Y^{\alpha-1} \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha} - 1}}.$$

8° Soit $x \geqslant 0$ l'abscisse du point d'ordonnée $y \geqslant m > 0$ situé dans Q sur la courbe $\gamma \in S_k$ passant par $(0, m)$. Montrer que

$$y^{\alpha-1}x = F\left(\frac{y}{m}\right).$$

9° On suppose d'abord $k \geqslant 0$, c'est-à-dire $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.

a) Soit f_1 et f_2 deux solutions de l'ensemble S_k telles que $f_1(0) = m_1 < m_2 = f_2(0)$. S'il existe des réels $x > 0$ tels que $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, soit $\xi > 0$ leur borne inférieure. En comparant sur l'intervalle $[0, \xi]$ f_1'' à f_2'' puis f_1' à f_2', montrer que l'existence de ξ est contradictoire.

b) En déduire que F est croissante sur $[1, +\infty[$.

c) Si de plus $\alpha \geqslant 1$, quel est l'ensemble des valeurs de F sur $[1, +\infty[$? En déduire le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_k$ passant par un point (x_1, y_1) fixé dans Q.

10° Dans cette question, on suppose $0 < \alpha < 1$.

a) Justifier, pour tout réel $s > 1$, l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{s-1}} - \frac{1}{\sqrt{s}} \leqslant \frac{1}{2(s-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

b) En déduire que

$$\lim_{Y \to +\infty} F(Y) = \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}.$$

(On pourra, dans l'intégrale qui intervient dans la définition de F, diviser l'intervalle d'intégration $[1, Y]$ en deux intervalles $[1, 2]$ et $[2, Y]$ par exemple.)

c) Si $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$, déduire de ce qui précède, selon la position du point (x_1, y_1) dans Q, le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_k$ passant par (x_1, y_1) et dessiner schématiquement la courbe séparant les deux régions obtenues.

11° On s'intéresse désormais *exclusivement* au cas restant à étudier, c'est-à-dire celui où $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

a) Montrer que la dérivée F' de F s'annule au plus une fois sur $]1, +\infty[$.

b) Justifier, pour tout réel $s > 1$, l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{s-1}} - \frac{1}{\sqrt{s}} \geqslant \frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}}$$

et en déduire, lorsque $\alpha \leqslant \frac{1}{3}$, la limite de $Y^{2-\alpha}F'(Y)$ pour Y tendant vers $+\infty$.

c) Lorsque $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{3}$, montrer que F' s'annule pour une et une seule valeur de Y, notée Y_0, et calculer le maximum de F en fonction de Y_0 et α.

d) Toujours pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{3}$, déduire de ce qui précède, selon la position du point (x_1, y_1) dans Q, le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_k$ passant par (x_1, y_1) et dessiner schématiquement les courbes séparant les diverses régions obtenues. Trouver dans Q une courbe tangente en chacun de ses points à l'une des courbes $\gamma \in \Gamma_k$.

12° On suppose enfin que $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

a) Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha} - 1}} - \frac{1}{t^\alpha} \right) dt$$

est convergente et que la fonction ψ définie par

$$\psi(\alpha) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha} - 1}} - \frac{1}{t^\alpha} \right) dt + \frac{1}{\alpha - 1}$$

est décroissante sur $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Quelle est la valeur de $\psi\left(\frac{1}{2}\right)$? Quel est le signe de ψ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$?

b) En déduire que F' s'annule une fois et une seule sur $]1, +\infty[$ lorsque $\alpha \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$.

c) Les résultats obtenus dans la question **11° *d*)** s'étendent-ils au cas où $\alpha \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$?

Excellente application du Th. de Cauchy - Lipschitz.

(Indications p 23)

Polytechnique 90
RMS 90-91 n° 6553

Étude qualitative de solutions strictement positives de l'équation différentielle $y''=y^k$

SOLUTION :

I.1.a $y''=1$ donne $y=\frac{x^2}{2}+m$. S_0 est constitué des fonctions $f(x)=\frac{x^2}{2}+m$ définies sur $\mathbb{R}$. Les courbes intégrales de Γ_0 sont des paraboles de sommets dans $P\cap(Oy)$ et de paramètre 1.

I.1.b $f(x_1)=y_1 \Leftrightarrow y_1=\frac{x_1^2}{2}+m \Leftrightarrow m=y_1-\frac{x_1^2}{2}$

- Si $y_1-\frac{x_1^2}{2}>0$, une seule courbe de Γ_0 passe par (x_1,y_1)
- Si $y_1-\frac{x_1^2}{2}\leq 0$, aucune courbe de Γ_0 ne passe par (x_1,y_1).

I.2 $y''=y$ se résout en $y=ae^x+be^{-x}$. Compte tenu de $f'(0)=0$ et $f(0)=m$, on obtient les solutions suivants de S_1 :

$$f(x)=\frac{m}{2}(e^x+e^{-x})=m\,\mathrm{ch}\,x$$

Les courbes intégrales de Γ_1 se déduisent de la chaînette $y=\mathrm{ch}\,x$ par des affinités orthogonales de base Ox, de direction Oy et de rapport $m>0$.

Enfin $f(x_1)=y_1 \Leftrightarrow y_1=\frac{m}{2}(e^x+e^{-x}) \Leftrightarrow m=\frac{2y_1}{e^x+e^{-x}}$, donc :

- Si $y_1>0$, il existe une seule courbe de Γ_0 passant par (x_1,y_1)
- Si $y_1\leq 0$, il n'y en a pas.

I.3.a

E_{-1} : $y''=\frac{1}{y}$

L'application $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $(x,y,y')\longmapsto \frac{1}{y}$ est C^1 et l'on peut appliquer le Th de Cauchy-Lipschitz : il existe une unique solution maximale f_0 de E_{-1} vérifiant les conditions initiales $f_0(0)=1$ et $f_0'(0)=0$

Vérifions qu'il s'agit de $f(x) = m\, f_0\left(\frac{x}{m}\right)$:

$$f'(x) = f_0'\left(\frac{x}{m}\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{m}\, f_0''\left(\frac{x}{m}\right)$$

donc $f''(x) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{f_0\left(\frac{x}{m}\right)} = \frac{1}{f(x)}$ ie f est solution de E_{-1}.

De plus $\begin{cases} f(0) = m\, f_0(0) = m \\ f'(0) = f_0'(0) = 0 \end{cases}$

f est définie sur $I_m = m\,I$, et I_m est l'intervalle maximum sur lequel est défini f (car f défini sur $J \supsetneq I_m$ entraine $f_0(t) = \frac{1}{m} f(tm)$ défini sur $\frac{1}{m} J \supsetneq I$ et solution de E_{-1} sur cet intervalle, absurde car (I, f_0) est une sol. maximale !)

* Le graphe de f se déduit de f_0 par l'homothétie de centre 0 et de rapport m :

Visuellement :

$m\, f_0\left(\frac{x}{m}\right)$

$f_0\left(\frac{x}{m}\right)$ ..... $f_0\left(\frac{x}{m}\right)$

$\frac{x}{m}$ x

ou si l'on préfère : $\begin{pmatrix} \frac{x}{m} \\ f_0\left(\frac{x}{m}\right) \end{pmatrix} \xmapsto{\times m} \begin{pmatrix} x \\ m\, f_0\left(\frac{x}{m}\right) \end{pmatrix}$

I.3.b $ff''=1$ et $f>0$ par hypothèse, donc $f''(x)>0 \quad \forall x \in I_m$.

f est donc convexe sur I_m. f' est croissante strictement, et comme $f'(0)=0$, f' sera positive sur $I_m \cap \mathbb{R}_+$ et négative sur $I_m \cap \mathbb{R}_-$.

f croîtra sur $I_m \cap \mathbb{R}_+$ et décroîtra sur $I_m \cap \mathbb{R}_-$.

I.4.a

* $\frac{d}{dx}(y'^2) = 2y'y'' = 2\frac{y'}{y} \quad \Rightarrow \quad y'^2 = 2\ln y + cte$

Les conditions $y'(0)=0$ et $y(0)=m$ imposent $cte = -2\ln m$. Donc :

$$y'^2 = 2\ln\frac{y}{m}$$

$$\boxed{y' = \sqrt{2\ln\frac{y}{m}}} \quad \text{car } y'>0 \text{ si } x \geq 0$$

* Soit I l'intervalle de définition de f et $a = \operatorname{Sup} I$.

y croît sur $I \cap \mathbb{R}_+$ donc tend vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$ quand $x \to a_-$.

$y'' = \frac{1}{y}$ tendra vers $\frac{1}{\ell} \in \mathbb{R}_+$ qui est fini.

Supposons par l'absurde que $a<+\infty$: l'intégrale $\int_0^a y''$ convergera car y'' tend vers une limite finie pour $x \to a_-$. Notons $\int_0^a y'' = \ell' \in \mathbb{R}$.

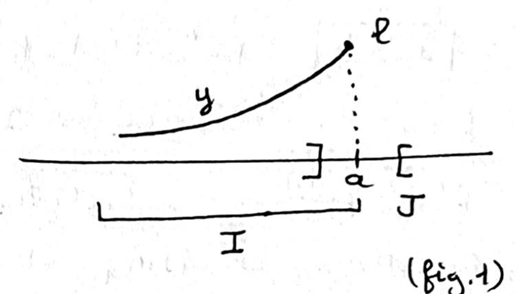
$y'(t) = \int_0^t y''$ tendra vers $\ell' \in \mathbb{R}$

Mais $y' = \sqrt{2\ln\frac{y}{m}} \underset{x\to a_-}{\longrightarrow} \sqrt{2\ln\frac{\ell}{m}}$ entraîne $\ell' = \sqrt{2\ln\frac{\ell}{m}} \in \mathbb{R}$

donc $\ell \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\lim_{x\to a_-} y = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to a_-} y' = \ell' \in \mathbb{R}$ et l'on peut prolonger la solution y en une solution définie au voisinage de a :

Par le Th. de Cauchy - Lipschitz :



(fig. 1)

∃! solution maximale de $z'' = \frac{1}{z}$

vérifiant les conditions initiales $\begin{cases} z(a) = \ell \\ z'(a) = \ell' \end{cases}$

Soit $z : J \to \mathbb{R}$ où J est un int. ouvert contenant a.

La solution $y : I \to \mathbb{R}$ se prolonge(*) en une solution sur $I \cup J$ ce qui est contraire à l'hypothèse de maximalité de y ! Donc $a = +\infty$.

De même $\operatorname{Inf} I = -\infty$ et <u>f est définie sur $\mathbb{R}$ en entier</u>.

* $f(0) = m$, et f est croissante sur $]0, +\infty[$ et convexe sur $\mathbb{R}$. On en déduit que <u>$\operatorname{Im} f = [m, +\infty[$</u>.

(*) Précisons ce pt : on pose $h(x) = \begin{cases} y(x) & \text{si } x \leq a \text{ et } x \in I \\ z(x) & \text{si } x \geq a \text{ et } x \in J \end{cases}$.

h est 2 fois dérivable sur $I \cap]-\infty, a[$ et sur $J \cap]a, +\infty[$ (cf fig. 1) et vérifie $h'' = \frac{1}{h}$ sur ces 2 intervalles. <u>En a</u> ? h est continue en a et $h(a) = \ell$.

$\lim\limits_{\substack{x \to a_- \\ x \neq a}} h'(x) = \ell' = \lim\limits_{\substack{x \to a_+ \\ x \neq a}} h'(x)$ montre que h est dérivable en a et $h'(a) = \ell'$.

h' sera donc continue au voisinage de a.

On recommence : $h'' = \frac{1}{h} \to \frac{1}{\ell} \in \mathbb{R}_+$ pour $x \to a_-$, $x \neq a$ ou pour $x \to a_+$, $x \neq a$

h' étant continue au voisinage de a, h' sera dérivable en a et $h''(a) = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{h(a)}$

<u>Ccl</u> : h est 2 fois différentiable sur $I \cup J$ et vérifie $h'' = \frac{1}{h}$ en tout point.

I.4.b

$$\frac{x}{y} = F(Y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{m}{y}\int_1^{y/m} \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} \Leftrightarrow x = \underbrace{m\int_1^{y/m} \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}}}_{\doteq g(x)} \qquad (*)$$

Or $g'(x) = \dfrac{y'}{\sqrt{2\ln \frac{y}{m}}} = 1 \Rightarrow g(x) = x + cte$

et $g(0) = cte = m\displaystyle\int_1^1 \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} = 0$, donc $(*)$ est assuré.

NB : $\displaystyle\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}}$ converge (pour $Y \in [1, +\infty[$ fixé) car par le chgt de variable $u = \ln t$, $\displaystyle\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} = \int_0^{\ln Y} \frac{e^u du}{\sqrt{2u}}$.

$\dfrac{e^u}{\sqrt{2u}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{u}}$ et $\displaystyle\int_0^{\ln Y} \frac{1}{\sqrt{u}} du$ converge.

I.4.c

$*$ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\ln t}} = 0$ donc il existe $A > 0$ tq $t > A \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2\ln t}} \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y}\int_A^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} \leq \varepsilon\,\frac{Y-A}{Y} \leq \varepsilon$$

$A > 1$ étant fixé, $\displaystyle\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}}$ converge (car $\dfrac{1}{\sqrt{2\ln t}} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$, ou en vertu de la NB ci-dessus) donc il existe Y_0 tq

$$Y > Y_0 \Rightarrow \frac{1}{Y}\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} < \varepsilon$$

et donc : $\quad Y > Y_0 \Rightarrow \displaystyle\frac{1}{Y}\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} \leq \frac{1}{Y}\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} + \frac{1}{Y}\int_A^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} \leq 2\varepsilon$

soit $\displaystyle\lim_{Y\to+\infty} F(Y) = 0$

* Si $x \to +\infty$, $y = f(x) \to +\infty$ et $Y = \frac{y}{m} \to +\infty$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{y(x)} = \lim_{Y\to+\infty} F(Y) = 0$$

et les branches infinies de γ seront paraboliques de direction asymptotique l'axe des y.

I.4.d

* Pour tout $Y \in]1, +\infty[$ $\quad F'(Y) = \frac{1}{Y^2}\left(\frac{Y}{\sqrt{2\ln Y}} - \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}}\right)$

donc $F'(Y) = 0 \iff \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} - \frac{Y}{\sqrt{2\ln Y}} = 0$

Posons $\varphi(Y) = \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} - \frac{Y}{\sqrt{2\ln Y}}$

$$\varphi'(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\ln Y}} - \frac{1 - \frac{1}{2\ln Y}}{\sqrt{2\ln Y}} = \frac{1}{2\ln Y\sqrt{2\ln Y}} > 0 \quad \forall Y$$

φ est strictement croissante. Comme $\lim_{Y\to1_+} \varphi(Y) = -\infty$,

φ s'annulera en une et une seule valeur Y_0 de Y.

NB: Pour cette valeur, on aura :

$$\frac{1}{Y_0}\int_1^{Y_0} \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} = \frac{1}{\sqrt{2\ln Y_0}}$$

ie $\boxed{F(Y_0) = \frac{1}{\sqrt{2\ln Y_0}}}$

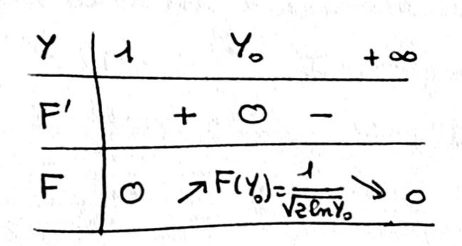
* $F(Y) = \frac{x}{y} \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dx}F(Y)}_{F'(Y)\cdot\frac{dY}{dx}} = \frac{y - xy'}{y^2}$ où $Y = \frac{y}{m}$

$\Rightarrow F'(Y_0) = 0 = y_0 - x_0 y'_0 \Rightarrow \boxed{y'_0 = \frac{y_0}{x_0}}$ comme désiré.

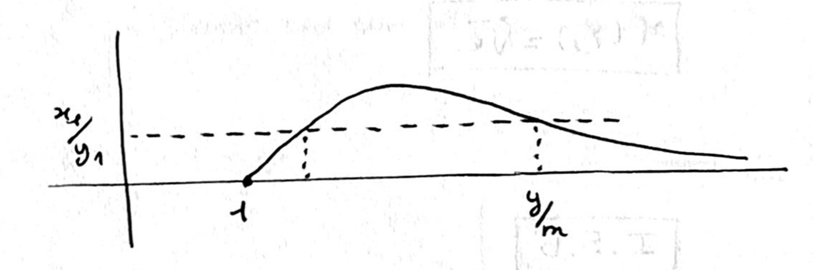
I.4.e

* $(x_1, y_1) \in \gamma \Leftrightarrow \exists m \,/\, y_1 = f(x_1) \Leftrightarrow \exists m \quad \dfrac{x_1}{y_1} = F\left(\dfrac{y_1}{m}\right)$ (et $y_1 > m$ pour que $\dfrac{y_1}{m} \in \text{Def} F$)

I.4.d montre que $F'(Y)$ est strictement décroissante et s'annule seulement en Y_0, soit :



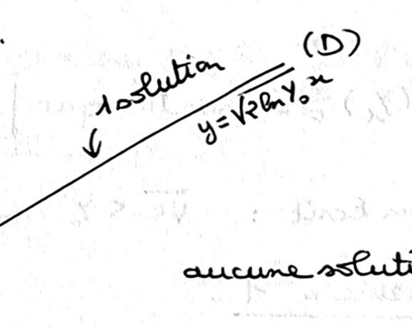
Y	1		Y_0		$+\infty$
F'		$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$F(Y_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\ln Y_0}}$	$\searrow$	0



D'où la discussion :

- Si $\dfrac{x_1}{y_1} \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2\ln Y_0}}\right[$, il y a 2 courbes passant par (x_1, y_1)
- Si $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2\ln Y_0}}$, il y en a une seulement
- Si $\dfrac{x_1}{y_1} > 0$, il n'y en a aucune.

Graphiquement :



* Si $Y = Y_0$, on a (I.4.b) et (I.4.d) : $f'(x) = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{F(Y_0)} = \sqrt{2\ln Y_0}$, ce qui

prouve que toutes les courbes γ de Γ_{-1} sont tangentes à (D).

I.5.a

$\varphi'(Y) = \dfrac{2\ln Y - 1}{2\ln Y\sqrt{2\ln Y}}$ s'annule en Y_1 tq $\ln Y_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow Y_1 = e^{1/2}$, d'où le

tableau de variation :

Y	1		Y_1		$+\infty$
φ'	‖		0		
φ	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\varphi(Y_1) = \sqrt{e}$

I.5.b

Par le chgt de variable $t = e^{\frac{u^2}{2}}$, $\displaystyle\int_1^{Y_1} \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} = \int_0^1 e^{u^2/2}\,du \leq e^{1/2}$

$$F'(Y_1) = \frac{1}{Y_1^2}\left(\frac{Y_1}{\sqrt{2\ln Y_1}} - \int_1^{Y_1}\frac{dt}{\sqrt{2\ln t}}\right) = \frac{1}{e}\Big(\sqrt{e} - \underbrace{\int_1^{Y_1}\frac{dt}{\sqrt{2\ln t}}}_{\leq\sqrt{e}}\Big) \geq 0$$

et $F'(Y_1) \geq 0$ montre que **$Y_1 < Y_0$** (cf tableau de variation de F en I.4.e)

que l'on écrit : $\sqrt{e} < Y_0 \Rightarrow 1 < \sqrt{2\ln Y_0}$. La pente de D est strictement supérieure à 1.

II.6.a Le Th. de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une et d'une seule solution maximale à l'équation $y'' = y^k$ vérifiant les conditions initiales $y'(0)=0$ et $y(0)=m$.

II.6.b $g(x) = f(-x)$ est définie sur J et $g''(x) = g(x)^k$

g est solution de $y''=y^k$ et vérifie les mêmes conditions initiales que f.
L'unicité de la sol. maximale de $y''=y^k$ vérifiant ces conditions montre que
1) $J = I$, ie I est symétrique /à 0
2) $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in I$, ie f est paire.

II.6.c

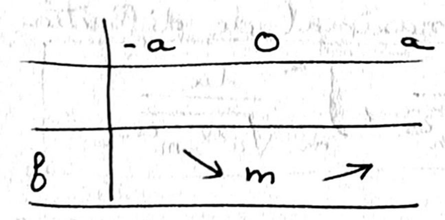
$*$ f est continue sur $I =]-a, a[$, $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$, et $f(0) = m > 0$ de sorte que f soit strictement positive sur un voisinage U de 0. $f'' = f^k$ sera donc strictement positive sur U et f' y sera strictement croissante.
Comme $f'(0)=0$, $f'(x)$ sera strictement positive sur $U \cap \mathbb{R}_+$ et l'ensemble

$$E = \{x \in [0, a[\ / \ f \text{ croissante sur } [0, x[\}$$

sera non vide.

Si $\operatorname{Sup} E \doteq b < a$, f sera croissante sur $[0, b[$ donc $f(b) \geq m > 0$, et f étant continue on recommence le raisonnement ci-dessus pour obtenir que f est croissante sur un voisinage de b, ce qui est absurde.

Donc $\operatorname{Sup} E = a$ et les variations de f sont :



	$-a$	0	a
f	$\searrow$	m	$\nearrow$

$*$ Enfin $f'' = f^k > 0$ montre que f est convexe sur I.

II.7.a

* $y'y'' = y'y^k \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y'^2}{2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y^{k+1}}{k+1}\right) \Rightarrow \frac{y'^2}{2} - \frac{y^{k+1}}{k+1} = -\frac{m^{k+1}}{k+1}$

d'où $y'^2 = \frac{1}{\alpha}(y^{2\alpha} - m^{2\alpha})$

Si $x \geq 0$, $y' \geq 0$ donc $\boxed{y' = \frac{\sqrt{y^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}}$

* Ainsi $\frac{y'}{\sqrt{y^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} x = \int_0^x \frac{y'\,dx}{\sqrt{y^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} = \int_m^{y(x)} \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$

soit $\boxed{x = \sqrt{\alpha} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}}$ (*)

Cette intégrale converge car $u = m + h \Rightarrow u^{2\alpha} = m^{2\alpha} + 2\alpha m^{2\alpha-1} h + o(h)$

$\Rightarrow u^{2\alpha} - m^{2\alpha} \sim 2\alpha m^{2\alpha-1} h \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \underset{m}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\alpha m^{2\alpha-1} h}}$ et

$\int_0^A \frac{1}{\sqrt{h}}$ converge.

* Si $\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$ converge (en ∞), on aura $0 \leq x \leq \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$,

* I sera borné et $I \subset \left]-\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}, \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}\right[$

En fait, I étant l'intervalle maximal de définition de la solution f, on aura $\boxed{I = \left]-\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}, \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}\right[}$ (remonter les calculs

en définissant $y(x)$ par (*) pour x dans cet intervalle $\left]-\int_m^\infty \cdots, \int_m^\infty \cdots\right[$ et en allant jusqu'à $y'y'' = y'y^k$ ie $y'' = y^k$)

* Si $\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha}-m^{2\alpha}}}$ diverge, $\lim_{+\infty} \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha}-m^{2\alpha}}} = +\infty$ et l'on peut remonter les calculs (comme précédemment) sans aucune restriction sur x :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il existe y, unique, $y \geq m$, tel que

$$x = \sqrt{\alpha} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha}-m^{2\alpha}}} \quad (*)$$

(car $y \mapsto \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha}-m^{2\alpha}}}$ est continue, strictement croissante de $[m,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$)

puis on lit les 2 premiers paragraphes de II.7.a à l'envers : on arrive, après une dérivation et une intégration à $y'y'' = y'y^k$, soit $y'' = y^k$.

__Ccl__ : I borné $\Longleftrightarrow$ $\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha}-m^{2\alpha}}}$ converge

Comme $\frac{1}{\sqrt{u^{2\alpha}-m^{2\alpha}}} \sim \frac{1}{u^\alpha}$, $\int_{m+1}^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha}-m^{2\alpha}}}$ convergera ssi $\alpha > 1$

et

I borné $\Longleftrightarrow$ $\alpha > 1$

* __Si I est borné__, soit $I =]-a, a[$, alors $\lim_{x \to a_-} y(x) = +\infty$

(sinon y étant croissante sur $[0, a[$, on aurait $\lim_{x \to a_-} y(x) = l \in \mathbb{R}$ et l'on pourrait prolonger __la__ solution __maximale__ y définie sur I à $I \cup J$ où J est un voisinage ouvert de a grâce au Th. de Cauchy-Lipschitz appliqué à $y'' = y^k$ et pour les conditions initiales $y(a) = l$ et $y'(a) = \frac{\sqrt{l^{2\alpha}-m^{2\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}$

~~y(x)~~ $x = a$ est alors une asymptote verticale à γ.

m
-a
o
a

Cas où $\alpha > 1$

II.7.b

* $$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{\alpha}}{y} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$$

$\lim_{u \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} = 0$ car $\alpha > 1$, donc $\exists A \quad u \geq A \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\quad}} \leq \varepsilon$

et : $y \geq A \Rightarrow \frac{1}{y} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \leq \frac{1}{y} \int_m^y \varepsilon \, du \leq \varepsilon$

Quant à $\frac{1}{y} \int_m^A \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$ une fois A fixé, il ne pose aucun problème :

$$\exists y_0 \quad y \geq y_0 \Rightarrow \frac{1}{y} \int_m^A \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}} \leq \varepsilon$$

Finalement $\quad y \geq y_0 \Rightarrow \frac{x}{y} \leq \sqrt{\alpha} . 2 \varepsilon$

et $\lim_{y \to +\infty} \frac{x}{y} = 0$.

$y(x)$ étant une fct strict. croissante de x, on a par composition des limites et compte tenu de $\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$ (car c'est (*) qui le montre, x pouvant croître jusqu'à $+\infty$) :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{\lim_{y \to +\infty} \frac{x}{y}} = +\infty$$

<u>γ possède donc une branche parabolique de dir. asymptotique l'axe Oy.</u>

* $$y' = \frac{\sqrt{y^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

III.8

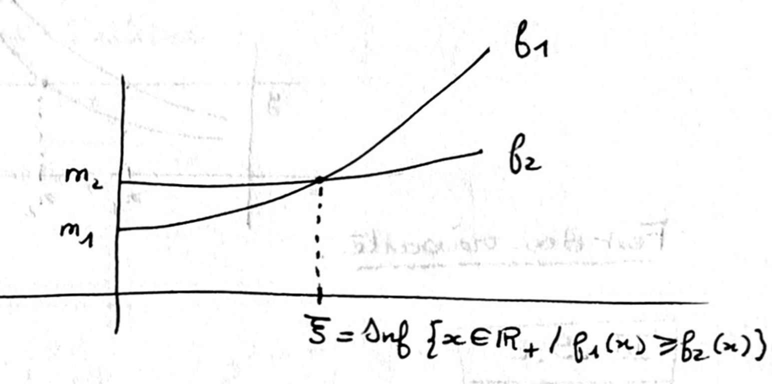
(*) de II.7.a s'écrit : $x = \sqrt{\alpha} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$

Par le chgt de variable $t = \frac{u}{m}$, on obtient :

$$x = \sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{m^\alpha} \int_1^{y/m} \frac{m\,dt}{\sqrt{t^{2\alpha} - 1}}$$

soit $y^{\alpha-1} x = \sqrt{\alpha} \left(\frac{y}{m}\right)^{\alpha-1} \int_1^{\frac{y}{m}} \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} = F\left(\frac{y}{m}\right)$

III.9.a



Posons $\varphi = f_2 - f_1$.

On a : $\begin{cases} \varphi'' = \varphi k \\ \varphi(0) = m_2 - m_1 > 0 \\ \varphi'(0) = f_2'(0) - f_1'(0) = 0 \end{cases}$

Soit $\xi = \text{Inf}\{x \in \mathbb{R}_+ / \varphi(x) \leq 0\} > 0$.

$x < \xi \Rightarrow \varphi(x) > 0$ et donc $\varphi(\xi) = 0$

D'autre part $\varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi''(x) > 0$ sur $]0, \xi[\Rightarrow \varphi'$ strict. croissante.

Comme $\varphi'(0) = 0$, φ' sera strict. positive sur $]0, \xi[$. φ sera donc strict. croissante sur $[0, \xi[$ et $\varphi(0) = m_2 - m_1$ entraînera :

$$\forall x \in]0, \xi[\quad \varphi(x) > m_2 - m_1 > 0$$

A la limite : $\varphi(\xi) \geq m_2 - m_1 > 0$ absurde.

<u>Ccl</u> : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi(x) \geq 0$ ie $f_2(x) \geq f_1(x)$

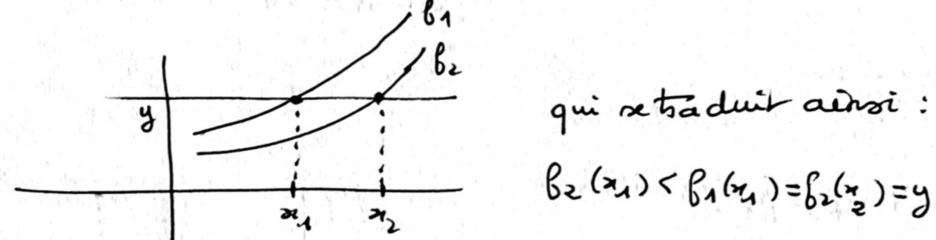
III.9.b

Soient $1 \leq Y_1 < Y_2$, $Y_1 = \frac{y}{m_1}$ et $Y_2 = \frac{y}{m_2}$

Soit x_1 l'abscisse du pt d'ordonnée y sur la courbe $y = f_1(x)$ (associée à m_1)
" x_2 " " $y = f_2(x)$ (" m_2)

On a $F(Y_2) - F(Y_1) = F\left(\frac{y}{m_2}\right) - F\left(\frac{y}{m_1}\right) = y^{\alpha-1}(x_2 - x_1) > 0$ car

$m_2 < m_1 \Rightarrow f_2(x) < f_1(x) \quad \forall x$ (8.a) et le dessin :



qui se traduit ainsi :

$f_2(x_1) < f_1(x_1) = f_2(x_2) = y \Rightarrow x_1 < x_2$.

<u>F est donc croissante</u>.

III.9.c

~~Si $y \to +\infty$, x, tel que $y(x) = y$, tendra vers $+\infty$~~ ~~(en effet, faire tendre y~~

* Fixons $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$. Le II.7.a montre que I n'est pas borné et que si $y \to +\infty$, x tendra aussi vers $+\infty$. Alors :

$$F\left(\frac{y}{m}\right) = y^{\alpha-1}x \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

d'où $\lim_{Y \to +\infty} F(Y) = +\infty$

Ainsi :

Y	1		$+\infty$
$F(Y)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

et F est une bijection (st. croissante) de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

* $y_1 = f(x_1) \Leftrightarrow \exists m \quad F\left(\frac{y_1}{m}\right) = \underbrace{y_1^{\alpha-1} x_1}_{\in \mathbb{R}_+} \Leftrightarrow m = \frac{y_1}{F^{-1}(y_1^{\alpha-1} x_1)}$

<u>Il existera donc une et une seule courbe γ passant par $(x_1, y_1) \in Q$.</u>

III.10.a

Soit $h(s)=s^{-\frac{1}{2}}$. $h'(s)=-\frac{1}{2s^{3/2}}$ et le Th. des accroissements finis donne :

$$\forall s>1 \quad \frac{1}{\sqrt{s-1}}-\frac{1}{\sqrt{s}} \leq \sup_{s-1<\theta<s} \frac{1}{2\theta^{3/2}} \leq \frac{1}{2(s-1)^{3/2}}$$

III.10.b

* Quelques essais nous convainquent d'utiliser :

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{Y^{1-\alpha}}\int_2^Y \frac{dt}{t^\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}-\frac{2^{1-\alpha}\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)Y^{1-\alpha}}$$

pour exprimer $\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}$:

$$F(Y)-\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha}}{Y^{1-\alpha}}\int_1^Y\frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}}-\frac{\sqrt{\alpha}}{Y^{1-\alpha}}\int_2^Y\frac{dt}{t^\alpha}-\frac{2^{1-\alpha}\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)Y^{1-\alpha}}$$

$$=\underbrace{\frac{\sqrt{\alpha}}{Y^{1-\alpha}}\int_1^2\frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}}}_{\to 0}+\frac{\sqrt{\alpha}}{Y^{1-\alpha}}\underbrace{\left(\int_2^Y\frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}}-\int_2^Y\frac{dt}{t^\alpha}\right)}_{\leq \int_2^Y \frac{dt}{2(t^{2\alpha}-1)^{3/2}}}-\underbrace{\frac{2^{1-\alpha}\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)Y^{1-\alpha}}}_{\to 0}$$

et tout revient à montrer que $\lim_{Y\to+\infty}\frac{1}{Y^{1-\alpha}}\int_2^Y\frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{3/2}}=0$.

* On désire minorer $t^{2\alpha}-1$, or : $t^{2\alpha}-1\geq\frac{1}{2}t^{2\alpha} \iff t\geq 2^{1/2\alpha}$

ce qui nous engage à écrire

$$\frac{1}{Y^{1-\alpha}}\int_2^Y\frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{3/2}}=\underbrace{\frac{1}{Y^{1-\alpha}}\int_2^{2^{1/2\alpha}}\frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{3/2}}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{Y^{1-\alpha}}\int_{2^{1/2\alpha}}^Y\frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{3/2}}}_{\text{à étudier}}$$

Maintenant :

$$\int_{2^{1/2\alpha}}^{Y} \frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{3/2}} \leq \int_{2^{1/2\alpha}}^{Y} \frac{dt}{\frac{t^{3\alpha}}{2^{3/2}}} = 2^{\frac{3}{2}} \int_{2^{\frac{1}{2\alpha}}}^{Y} t^{-3\alpha}\,dt$$

$$\leq \frac{2^{\frac{3}{2}}}{1-3\alpha}\left(Y^{1-3\alpha} - 2^{\frac{1-3\alpha}{2\alpha}}\right) \quad \text{si } \alpha \neq \frac{1}{3}$$

d'où $\displaystyle \frac{1}{Y^{1-\alpha}} \int_{2^{1/2\alpha}}^{Y} \frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{3/2}} \leq \frac{2^{3/2}}{1-3\alpha} \cdot \left(Y^{-2\alpha} - \frac{2^{\frac{1-3\alpha}{2\alpha}}}{Y^{1-\alpha}} \right) \underset{(Y \to +\infty)}{\longrightarrow} 0$

car $0<\alpha<1$

Reste à voir le cas où $\alpha = \frac{1}{3}$: alors

$$\frac{1}{Y^{1-\alpha}} \int_{2^{1/2\alpha}}^{Y} \frac{dt}{(t^{2\alpha}-1)^{3/2}} \leq \frac{2^{3/2}}{Y^{1-\alpha}} \left(\ln Y - \ln 2^{1/2\alpha} \right)$$ tendra aussi vers 0

pour Y tendant vers $+\infty$. CQFD

III.10.c Ainsi F est une bijection strictement croissante de $[1,+\infty[$ sur $\left[0, \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}\right[$ dès que $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$.

(x_1,y_1) est sur une courbe ssi $\exists m \quad y_1^{\alpha-1} x_1 = F\left(\frac{y_1}{m}\right)$. Donc :

1) Si $y_1^{\alpha-1} x_1 < \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}$, une et une seule courbe γ_m passe par (x_1,y_1)

2) Si $y_1^{\alpha-1} x_1 \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}$, aucune courbe ne passe par (x_1,y_1).

Graphiquement :

III.11.a

$$F(Y) = \sqrt{\alpha}\; Y^{\alpha-1} \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}}$$

$$F'(Y) = \sqrt{\alpha}\left((\alpha-1) Y^{\alpha-2} \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} + Y^{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}} \right)$$ s'annule ssi

$$\underbrace{(\alpha-1)\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} + \frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}}}_{\doteq\, \Phi(Y)} = 0$$

$\Phi'(Y) = \dfrac{-\alpha}{(Y^{2\alpha}-1)\sqrt{Y^{2\alpha}-1}} < 0 \quad \forall Y > 1$, donc Φ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, et $\lim\limits_{1_+} \Phi(Y) = +\infty$, donc F s'annulera au plus en une valeur de $Y \in]1,+\infty[$.

III.11.b

* Par le Th. de Rolle, il existe $c \in]s-1, s[$ tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{s-1}} - \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2c^{3/2}} \geqslant \frac{1}{2s^{3/2}} \qquad \forall s > 1$$

2e méthode : L'inégalité proposée équivaut à :

$$\frac{\sqrt{s}-\sqrt{s-1}}{\sqrt{s}\sqrt{s-1}} \geqslant \frac{1}{2s^{3/2}} \iff \frac{1}{s\sqrt{s-1} + (s-1)\sqrt{s}} \geqslant \frac{1}{2s^{3/2}} \iff 2s^{3/2} \geqslant s\sqrt{s-1} + (s-1)\sqrt{s}$$

$\iff 2 \geqslant \sqrt{\dfrac{s-1}{s}} + \dfrac{s-1}{s}$ ce qui est trivial car si $s > 1$, $\dfrac{s-1}{s} = 1 - \dfrac{1}{s} \leqslant 1$.

* $$Y^{2-\alpha} F'(Y) = \sqrt{\alpha}\left((\alpha-1)\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} + \frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}} \right) \leqslant \sqrt{\alpha}\left((\alpha-1)\int_1^Y \frac{dt}{2t^{3\alpha}} + (\alpha-1)\int_1^Y \frac{dt}{t^{\alpha}} + \frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}} \right)$$

(en utilisant la formule ci-dessus)

d'où :

$$Y^{2-\alpha}F'(Y) \leq \sqrt{\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{2}\underbrace{\int_1^Y \frac{dt}{t^{3\alpha}}}_{\frac{1}{1-3\alpha}(Y^{1-3\alpha}-1)} + (\alpha-1)\underbrace{\int_1^Y \frac{dt}{t^{\alpha}}}_{\frac{1}{1-\alpha}(Y^{1-\alpha}-1)} + \frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}}\right) \qquad \underline{\text{si } \alpha \neq \frac{1}{3}}$$

$$\leq \sqrt{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{2(1-3\alpha)}+1\right) + \underbrace{\sqrt{\alpha}\left(\underbrace{\frac{\alpha-1}{2(1-3\alpha)}}_{\doteq c_\alpha} Y^{1-3\alpha} - Y^{1-\alpha} + \frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}}\right)}_{}$$

$$= \left(c_\alpha + \frac{1}{2}\right)Y^{1-3\alpha} + o\left(Y^{1-3\alpha}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{-\alpha}{1-3\alpha}Y^{1-3\alpha} + o\left(Y^{1-3\alpha}\right)}_{\longrightarrow -\infty \quad (Y \to +\infty)}$$

Donc $\lim\limits_{Y \to +\infty} Y^{2-\alpha}F'(Y) = -\infty$

<u>2e cas</u> : Si $\alpha = \frac{1}{3}$, on procède de même :

$$Y^{2-\alpha}F'(Y) \leq \sqrt{\alpha}\left(-\frac{2}{3}\underbrace{\int_1^Y \frac{dt}{t}}_{\ln Y} - \frac{2}{3}\underbrace{\int_1^Y \frac{dt}{t^{1/3}}}_{\frac{3}{2}(Y^{2/3}-1)} + \frac{Y}{\sqrt{Y^{2/3}-1}}\right)$$

$$\leq \frac{\sqrt{\alpha}}{2} + \sqrt{\alpha}\left(\underbrace{-\frac{2}{3}\ln Y}_{\to -\infty} - Y^{2/3} + \underbrace{\frac{Y}{\sqrt{Y^{2/3}-1}}}_{= Y^{2/3} + \frac{1}{2} + o(1) \quad (Y \to +\infty)}\right)$$

$$\leq \underbrace{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}3 - \frac{2}{3}\sqrt{\alpha}\ln Y + \frac{1}{2} + o(1)}_{\to -\infty \quad (Y \to +\infty)}$$

et le résultat est $\boxed{\lim\limits_{Y \to +\infty} Y^{2-\alpha}F'(Y) = -\infty}$ dans tous les cas.

III.11.c

Si $0<\alpha\leq\frac{1}{3}$, $\lim_{+\infty} Y^{2-\alpha}F'(Y)=-\infty$ montre que $F'(Y)$ sera négatif pour Y voisin de $+\infty$, et $\lim_{Y\to 1_+} F'(Y)=+\infty$. F' étant continue sur $]1,+\infty[$, elle s'annulera en une seule valeur $Y_0\in]1,+\infty[$

Vu l'expression de $F'(Y)$ en III.11.a :

$$F'(Y_0)=0 \iff (\alpha-1)Y_0^{\alpha-2}\int_1^{Y_0}\frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}}+Y_0^{\alpha-1}\frac{1}{\sqrt{Y_0^{2\alpha}-1}}=0$$

$$(\alpha-1)Y_0^{-1}F(Y_0)=\frac{-\sqrt{\alpha}\,Y_0^{\alpha-1}}{\sqrt{Y_0^{2\alpha}-1}}$$

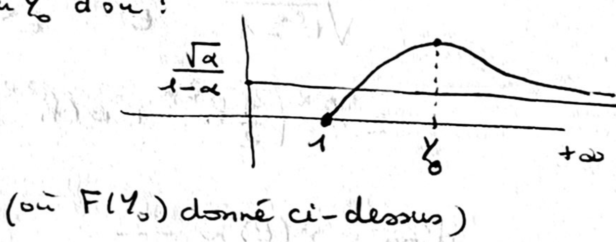
$$\boxed{F(Y_0)=\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}\cdot\frac{Y_0^{\alpha}}{\sqrt{Y_0^{2\alpha}-1}}}$$

III.11.d

$(x_1,y_1)\in\gamma \iff \exists m \quad y_1^{\alpha-1}x_1=F\left(\frac{y_1}{m}\right)$

Si $0<\alpha\leq\frac{1}{3}$, F' s'annule en une seule valeur Y_0 d'où :

Y	1	Y_0	$+\infty$
F'		0	
F	0 $\nearrow$	$F(Y_0)$	$\searrow$ $\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}$



(où $F(Y_0)$ donné ci-dessus)

d'où la discussion :

— Si $y_1^{\alpha-1}x_1\in\left[0,\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}\right]$, une seule courbe passe par (x_1,y_1)

— Si $y_1^{\alpha-1}x_1\in\left]\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha},F(Y_0)\right[$, 2 courbes conviennent.

— Si $y_1^{\alpha-1}x_1=F(Y_0)$, une seule courbe.

— Si $y_1^{\alpha-1}x_1>F(Y_0)$, aucune.

Graphiquement, les courbes permettant de distinguer ces différents cas sont :

$$y_1^{\alpha-1}x_1=\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} \iff y_1=\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\cdot x_1^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (C_1)$$

et $y_1^{\alpha-1} x_1 = F(y_0) \iff y_1 = F(y_0)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot x^{\frac{1}{1-\alpha}}$ (C_2)

(C_1) (C_2)

1 seule courbe

2 courbes

aucune courbe

III.12.a

* Cette intégrale est convergente en 1 car $\int_1^A \frac{dt}{t^\alpha}$ est définie et $\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}}$ converge $\left(\text{puisque } \frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\alpha(t-1)}} \text{ et } \int_1^A \frac{1}{\sqrt{t-1}} \text{ converge.}\right)$

Au voisinage de $+\infty$: $h = \frac{1}{t}$

$$v(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{1}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\alpha\sqrt{1-h^{2\alpha}}} - h^\alpha = h^\alpha\left((1-h^{2\alpha})^{-\frac{1}{2}} - 1\right)$$

$$= h^\alpha\left(\frac{1}{2}h^{2\alpha} + o(h^{2\alpha})\right) = \frac{1}{2}h^{3\alpha} + o(h^{3\alpha})$$

d'où $v(t) \sim \frac{1}{2t^{3\alpha}}$

$3\alpha > 1$ donc $\int_1^\infty \frac{dt}{t^{3\alpha}}$ converge et $\int_1^\infty v(t)\,dt$ aussi.

* <u>Décroissance de $\Psi(\alpha) = \int_1^\infty \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{1}{t^\alpha}\right)}_{\doteq\, v(t)} dt + \frac{1}{\alpha-1}$ pour $\alpha \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$</u>.

$\alpha \mapsto \frac{1}{\alpha-1}$ est décroissante, et $v(t) = \frac{t^\alpha - \sqrt{t^{2\alpha}-1}}{t^\alpha\sqrt{t^{2\alpha}-1}} = \frac{1}{t^\alpha\sqrt{t^{2\alpha}-1}\,(t^\alpha + \sqrt{t^{2\alpha}-1})}$

aussi parceque $\alpha \mapsto t^\alpha$ et $\alpha \mapsto \sqrt{t^{2\alpha}-1}$ sont croissantes.

* $$\Psi\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt - 2$$
$$= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t-1}} - \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} - 2$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} - \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} - 2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt - 2 = 0$$

* <u>Donc $\Psi > 0$ sur $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$.</u>

III.12.b

* $$F'(Y) = \sqrt{\alpha}\left((\alpha-1)\,Y^{\alpha-2}\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} + \frac{Y^{\alpha-1}}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}}\right) \quad \text{(d'après III.11.a)}$$

Ainsi $\operatorname{Sgn} F'(Y) = \operatorname{Sgn} \varphi(Y)$ où $\varphi(Y) \doteq (\alpha-1)\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} + \frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}}$.

$\lim_{Y\to 1_+} \varphi(Y) = +\infty$ et φ est continue sur $]1, +\infty[$. Montrer qu'elle s'annule sur cet intervalle revient à prouver que $\varphi(Y)$ prend des valeurs négatives. (III.11.a) permettra alors de conclure à la nullité de $\varphi(Y)$ <u>en une seule</u> valeur de Y.

* Montrons donc que $\varphi(Y)$ prend des valeurs négatives sur $]1,+\infty[$:

On a vu (12.a) :

$$\forall\alpha \quad \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}}-\frac{1}{t^{\alpha}}\right)dt+\frac{1}{\alpha-1} > 0$$

donc :

$$\exists\varepsilon>0 \quad \exists Y_0 \quad Y>Y_0 \Rightarrow \int_1^{Y}\left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}}-\frac{1}{t^{\alpha}}\right)dt+\frac{1}{\alpha-1} > \varepsilon$$

Ainsi, pour $Y>Y_0$:

$$(\alpha-1)\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - (\alpha-1)\underbrace{\int_1^Y \frac{1}{t^{\alpha}}dt}_{\frac{Y^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}} + 1 < (\alpha-1)\varepsilon$$

que l'on arrange :

$$(\alpha-1)\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} < -Y^{1-\alpha}+(\alpha-1)\varepsilon$$

d'où $\varphi(Y) < \underbrace{\frac{Y}{\sqrt{Y^{2\alpha}-1}} - Y^{1-\alpha}}\,+(\alpha-1)\,\varepsilon$

on cherche le del. de cette expression ($h=\frac{1}{Y}$ etc)
on obtient $\frac{1}{2}Y^{1-3\alpha}+o(Y^{1-3\alpha})$

$$\varphi(Y) < \underbrace{\frac{1}{2}Y^{1-3\alpha}+o(Y^{1-3\alpha})}_{\substack{\longrightarrow 0\\ (Y\to+\infty)}} + \underbrace{(\alpha-1)\,\varepsilon}_{<0}$$

D'où $\varphi(Y) < (\alpha-1)\,\varepsilon < 0$ pour $Y>Y_0$.

CQFD

III.12.c On obtient le m̂ tableau de variation qu'en III.11.d, ~~puis~~ donc les mêmes résultats

Indications

II.7.a • Démarrer avec $y'y'' = y'y^k$, qui sont les dérivées de ...

en déduire $x = \sqrt{\alpha} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$.

• Pour quelles valeurs de α, I est-il borné ?

Faire intervenir l'intégrale impropre $\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$, et raisonner en 2 temps :

– Si $\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$ converge, alors $I \cap \mathbb{R}_+ \subset [0, \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}[$ et

la solution étant maximale, $I =]-\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}, \int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}[$

est borné.

– Si I n'est pas borné, $I = \mathbb{R}_+$, montrer que $\int_m^\infty \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$ diverge.

II.7.b

Chercher d'abord $\lim_{y \to +\infty} \frac{x}{y}$ grâce à $x = \sqrt{\alpha} \int_m^y \frac{du}{\sqrt{u^{2\alpha} - m^{2\alpha}}}$ (7.a)

III.11.b Montrer que $\lim Y^{2-\alpha} F'(Y) = -\infty$ en majorant $Y^{2-\alpha} F'(Y)$ grâce à l'inégalité de l'énoncé.